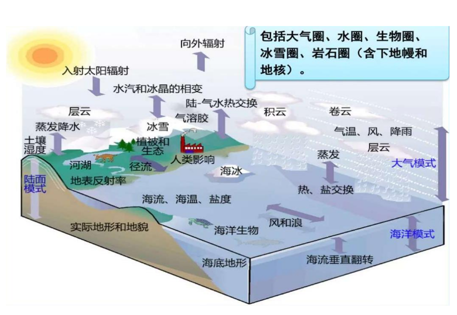
大气环流模式 IAP-AGCM 动力学框架的适定性研究及应用

马洁琼 连汝续 曾庆存 张贺

中国科学院大气物理研究所国际气候与环境科学中心

研究背景和意义



地球系统模式的发展是气象学现代化的重要标志之一，体现了物理学、化学、生物学与数学等多学科的高度交叉融合

从2008年起美、欧、日等发达国家已相继建立了各自的地球系统模式

自主研发先进的地球系统模式是我国参与全球气候环境治理，开展气候外交的迫切需求!

中国科学院大气物理研究所研发了地球系统模式CAS-ESM，其绝大部分分系统模式是我国科学家自主研制的

大气环流模式（IAP-AGCM）是各分系统模式中发展最早也是最为重要的一个子系统之一

大气环流模式的多个重大研究突破都与数学理论的发展及其使用密切相关

利用原始方程的初边值问题来构建用于气候模拟与预测的数值模式的动力学框架	在无法求得具体的解析解的情况下，对动力学框架进行适定性分析	针对气候数值模拟和数值天气预报等实际问题，设计数值方法进行高性能计算

目前对大气环流模式的研究主要集中在物理过程的参数化研发和改进，以及利用模式进行模拟评估和预测等，对大气环流模式的适定性理论研究甚少

模式适定性的研究一直未取得突破性进展原因在于

- 数学理论方法的突破困难
- 模式的动力学框架相较于数学家研究的方程组更加复杂

若不能保证动力学模式在物理上合理在数学上适定 → 模拟结果的不确定性将会大大增加

适定性研究不仅有助于从根本上认识大气运动机理、掌握天气和气候演变规律；在模式数值计算的研究中也具有重要的指导作用

考虑水汽相变过程的大气环流模式动力学框架

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t}+(V^*\cdot\nabla)V+\dot{\zeta}^*\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}+\left(2\omega\cos\theta+\dfrac{\cot\theta}{a}v_\lambda\right)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}V\\
+\nabla\Phi'=-\dfrac{R\zeta}{\tilde{p}_{es}\zeta+p_t}T'\nabla\tilde{p}_{es}+\dfrac{\mu_1}{\tilde{p}_{es}}\Delta V+\nu_1\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\left(\dfrac{g\zeta}{R\tilde{T}}\right)^2\dfrac{\partial V}{\partial\zeta}\right),\\
c_p\left(\dfrac{\partial T'}{\partial t}+(V^*\cdot\nabla)T'+\dot{\zeta}^*\dfrac{\partial T'}{\partial\zeta}\right)\\
-\dfrac{c_pc_0^2}{\tilde{p}_{es}\zeta+p_t}\left(\tilde{p}_{es}\dot{\zeta}+\zeta\left(\dfrac{\partial p'_{es}}{\partial t}+\nabla\tilde{p}_{es}\cdot V\right)\right)\\
=\dfrac{\mu_2}{\tilde{p}_{es}}\Delta T'+\nu_2\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\left(\dfrac{g\zeta}{R\tilde{T}}\right)^2\dfrac{\partial T'}{\partial\zeta}\right)+\boxed{\dfrac{dQ}{dt}},\\
\cdots\cdots
\end{cases}
$$

加热项（辐射加热潜热加热）证明难点复杂估计

$$
\begin{cases}
\cdots\cdots\\
\dfrac{\partial q}{\partial t}+(V^*\cdot\nabla)q+\dot{\zeta}^*\dfrac{\partial q}{\partial\zeta}=\dfrac{\mu_3}{\tilde{p}_{es}}\Delta q+\nu_3\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\left(\dfrac{g\zeta}{R\tilde{T}}\right)^2\dfrac{\partial q}{\partial\zeta}\right)\boxed{+F_q},\\
\dfrac{\partial m_w}{\partial t}+(V^*\cdot\nabla)m_w+\dot{\zeta}^*\dfrac{\partial m_w}{\partial\zeta}=\dfrac{\mu_4}{\tilde{p}_{es}}\Delta m_w\\
+\nu_4\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\left(\dfrac{g\zeta}{R\tilde{T}}\right)^2\dfrac{\partial m_w}{\partial\zeta}\right)-F_q\boxed{+P_r},\\
\boxed{\dfrac{\partial p'_{es}}{\partial t}+\nabla\cdot(\tilde{p}_{es}V)+\dfrac{\partial\tilde{p}_{es}\dot{\zeta}}{\partial\zeta}=0},\\
\dfrac{\partial\Phi'}{\partial\zeta}+\dfrac{R\tilde{p}_{es}}{\tilde{p}_{es}\zeta+p_t}T'=0,
\end{cases}
$$

凝结和蒸发引起的水量变化和降水率 证明难点：复杂估计

消除整层无辐散近似 证明难点：地表气压的正则性估计

$$
\begin{cases}
U=(V,T',q,m_w),\\
U(\theta,\lambda,\zeta,t)=U(\theta+\pi,\lambda,\zeta,t)=U(\theta,\lambda+2\pi,\zeta,t),\\
\left.\dfrac{\partial V}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=\left.\dfrac{\partial T'}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=\left.\dfrac{\partial q}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=\left.\dfrac{\partial m_w}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=\dot{\zeta}\,|_{\zeta=0}=0,\\
\boxed{\left.\left(\nu_1\dfrac{\partial V}{\partial\zeta}+k_{s1}V\right)\right|_{\zeta=1}=0},\quad \left.\left(\nu_2\dfrac{\partial T'}{\partial\zeta}+k_{s2}T'\right)\right|_{\zeta=1}=0,\\
\boxed{\left.\left(\nu_3\dfrac{\partial q}{\partial\zeta}+k_{s3}(q-q_m^*)\right)\right|_{\zeta=1}=0},\quad \left.\dfrac{\partial m_w}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1}=0,\\
\dot{\zeta}\,|_{\zeta=1}=0,\quad \Phi'|_{\zeta=1}=\dfrac{R\tilde{T}_s}{\tilde{p}_{es}}p'_{es}(\theta,\lambda,t).
\end{cases}
$$

合理的边界条件 证明难点：复杂的边界项

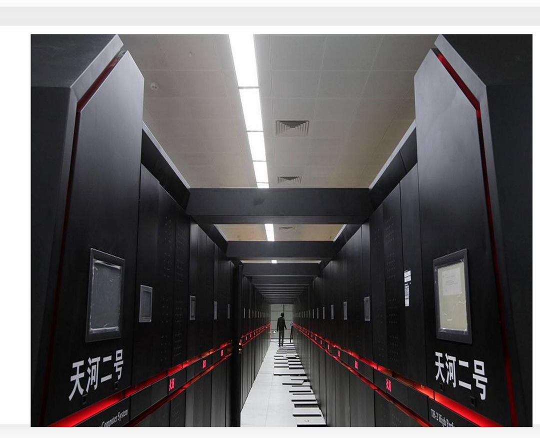
结论：

- ◆证明了考虑水汽相变过程的IAP-AGCM动力学框架具有一阶正则性的整体强解的存在唯一性
- ◆在某个足够小的时间内，证明了考虑水汽相变过程的IAP-AGCM动力学框架具有二阶正则性的局部强解的存在唯一性

水汽通量方程的计算稳定性分析

适定性研究虽然可以用来揭示大气的运动特征和演变规律，然而要用来说明天气运动的一些具体现象又或是用于业务预报、防灾减灾等实际问题还需定量分析相配合

针对气候数值模拟和数值天气预报等实际问题，设计数值方法进行高性能计算（以适定性为基础）



水汽通量方程的初边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial q_\rho}{\partial t}=\kappa\Delta q_\rho+\bar{S}-\nabla\cdot\left(\overline{\tilde{q}V}\right), & (\theta,\lambda)\in S^2,\quad 0<t\le T,\\
q_\rho(\theta,\lambda,0)=q_\rho^{(0)}(\theta,\lambda), & 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\lambda\le 2\pi,\\
q_\rho(\theta,\lambda,t)=\beta(\theta,\lambda,t), & (\theta,\lambda)\in\Gamma,\quad 0<t\le T,
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $\tilde{\tilde{q}}$ 为参考标准态，κ 为正常数；$S^2=[0,\pi]\times[0,2\pi]$，$\Gamma$ 是 S^2 的边界，当 $(\theta,\lambda)\in\Gamma$ 时，有 $\beta(\theta,\lambda,0)=q_\rho^{(0)}(\theta,\lambda)$.

结论：

- ◆利用能量估计方法，证明了交替方向隐格式关于时间步长与空间步长的收敛阶均是二阶；关于初值和右端项的舍入误差在无穷范数下有界
- ◆证明了紧致交替方向隐格式关于时间步长的收敛阶是二阶，关于空间步长的收敛阶是四阶；关于初值和右端项的舍入误差在无穷范数下有界

参考文献

- Lian R*, Ma J*. Existence of a strong solution to moist atmospheric equations with the effects of topography. Boundary Value Problems. 2020, 103: 1-34.
- Ma J, Lian R*, Zeng Q. Local Well-Posedness of Strong Solutions to a Climate Dynamic Model with Phase Transformation of Water Vapor. Journal of Mathematical Physics. 2022, 63(5): 051504.